

# Learning signal processing in Persian language

## Step 12: Empirical Wavelet Transform (EWT)

ساناز جواهریان

دانش‌آموخته کارشناسی ارشد مهندسی پزشکی

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر دانشگاه تهران

گفتم EMD یک الگوریتم برای رسیدن به IMF های سیگنال کمک می‌گیرد؛ درست است که این الگوریتم یک روش برای شناسایی مؤلفه های فرکانسی سیگنال های غیرخطی و غیرایستا است.

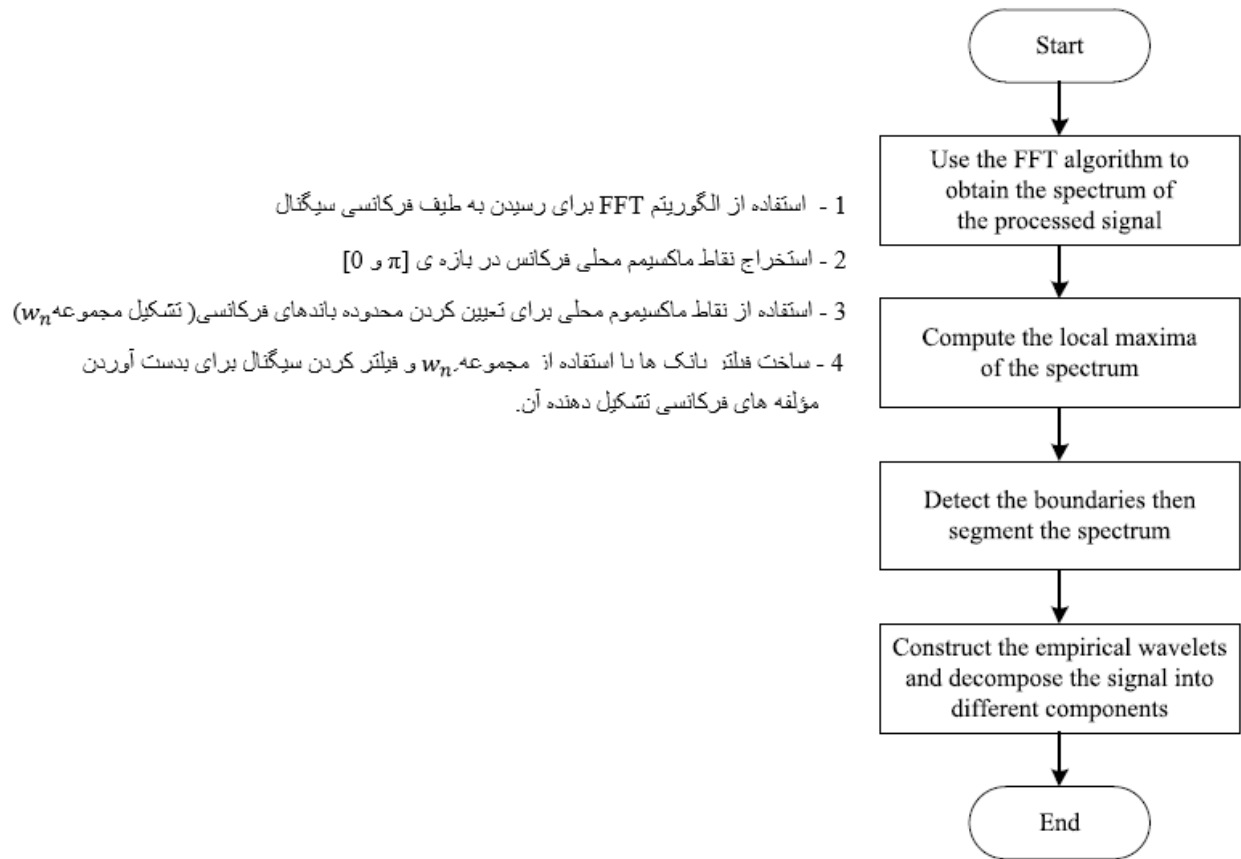
اما بزرگترین عیب این الگوریتم غیرخطی این است که دارای یک رابطه ی بسته ی ریاضی نیست، پس برای ما ممکن نیست که خروجی و رفتار این الگوریتم را پیش بینی و یا حتی تخمین بزنیم؛ بعلاوه EMD یک روش مبتنی بر محاسبات پی در پی و تکرار است که قاعداً مدت زمان زیادی را طلب می‌کند. گاهی ما خواهان این هستیم که قبل از انجام محاسبات، شکل خروجی مان را حدوداً پیش بینی کنیم.

اما روش EMD با شرایطی که گفته شد، این اجازه را به ما نمی‌دهد.

EWT یک روش جدید است که به ساخت فیلترها بانک های مناسب ( مشابه DWT ) به استخراج mode های تشکیل دهنده ی سیگنال می‌پردازد. این روش ما را به سمت یک تبدیل ویولت جدید، بنام امپریکال ویولت ترنسفورم هدایت می‌کند. مهم ترین تفاوت این تبدیل با EMD در داشتن رابطه ای به شکل بسته است، که این اجازه را به ما می‌دهد که رفتار و حتی شکل کلی خروجی تبدیل را بتوانیم تخمین بزنیم. حال می‌خواهیم چگونگی رفتار این تبدیل را مورد بررسی قرار دهیم.

الگوریتم این تبدیل به صورت زیر است:





در EWT می خواهیم که سیگنال را با استفاده از فیلترهای میان گذر که با استفاده از ویولت مادر Meyer طراحی شده است، به IMF های تشکیل دهنده اش تقسیم کنیم؛ برای این منظور باید بتوانیم که محدوده ی باند گذر دهی فیلترها را به درستی تعیین کنیم. اما چگونه؟ در قسمت قبل گزارش، به این نکته اشاره کردیم که تبدیل فوریه و الگوریتم EMD رفتاری مشابه با یکدیگر دارند، پس بهترین گزینه برای تعیین کردن محدوده باند گذر دهی فیلترها، استفاده از طیف فرکانسی حاصل از تبدیل فوریه است.

اما چگونه باید این طیف را تقسیم بندی کنیم؛ نقاط ماکسیموم یا همان پیک های موجود در طیف فرکانسی، نشان دهنده ی مؤلفه های اصلی سیگنال هستند. یعنی این مؤلفه ها باید در محدوده گذر دهی فیلترها حضور داشته باشند.

اما کدام ناحیه بین دو پیک را برای تقسیم بندی انتخاب کنیم؛ برای این منظور، کمترین ماکسیموم محلی که بین دو ماکسیموم متوالی قرار دارد را به عنوان مرز بین بازه ها انتخاب می کنیم.

در مرحله بعد با داشتن محدوده های بین بازه ها به تشکیل دو پارامتر اصلی در تبدیل ویولت، یعنی scaling Function و Wavelet Function می پردازیم.

گفتیم که این دو تابع با توجه به تابع ویولت Meyer بازنویسی شده اند.

در پایین رابطه ی هر آورده شده است.

$$\hat{\phi}_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{if } |\omega| \leq (1 - \gamma)\omega_n \\ \cos \left[ \frac{\pi}{2} \beta \left( \frac{1}{2\gamma\omega_n} (|\omega| - (1 - \gamma)\omega_n) \right) \right] & \text{if } (1 - \gamma)\omega_n \leq |\omega| \leq (1 + \gamma)\omega_n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\hat{\psi}_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{if } (1 + \gamma)\omega_n \leq |\omega| \leq (1 - \gamma)\omega_{n+1} \\ \cos \left[ \frac{\pi}{2} \beta \left( \frac{1}{2\gamma\omega_{n+1}} (|\omega| - (1 - \gamma)\omega_{n+1}) \right) \right] & \text{if } (1 - \gamma)\omega_{n+1} \leq |\omega| \leq (1 + \gamma)\omega_{n+1} \\ \sin \left[ \frac{\pi}{2} \beta \left( \frac{1}{2\gamma\omega_n} (|\omega| - (1 - \gamma)\omega_n) \right) \right] & \text{if } (1 - \gamma)\omega_n \leq |\omega| \leq (1 + \gamma)\omega_n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

در رابطه ی قبل  $\tau_n$  تعیین کننده یک tight frame و تابع  $v(x)$  یک تابع تعریف شده در رابطه ی ویولت Meyer است که به صورت زیر می باشد.

$$v(x) = \begin{cases} x^4(35 - 84x + 70x^2 - 20x^3) & \text{if } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

با داشتن روابط scaling Function و Wavelet Function می توانیم به استخراج ضرایب Approximate و ضرایب Detail تابع ویولت پردازیم.

ضرایب Approximate از ضرب داخلی سیگنال با scaling Function ؛

$$W_f^\varepsilon(0, t) = \langle f, \phi_1 \rangle = \int f(\tau) \overline{\phi_1(\tau - t)} d\tau$$

ضرایب Detail از ضرب داخلی سیگنال با Wavelet Function حاصل می شوند.

$$W_f^\varepsilon(n, t) = \langle f, \psi_n \rangle = \int f(\tau) \overline{\psi_n(\tau - t)} d\tau$$

سپس شکل EMD سیگنال یعنی همان تجزیه به Mode های تشکیل دهنده سیگنال با استفاده از تعریف زیر شکل میگیرد.

$$f_0(t) = W_f^\varepsilon(0, t) * \phi_1(t)$$

$$f_k(t) = W_f^\varepsilon(n, t) * \psi_k(t)$$

$$f(t) = \sum_{k=0}^N f_k(t)$$

در شکل زیر یک سیگنال که از ترکیب سه تابع تشکیل شده است را داریم.

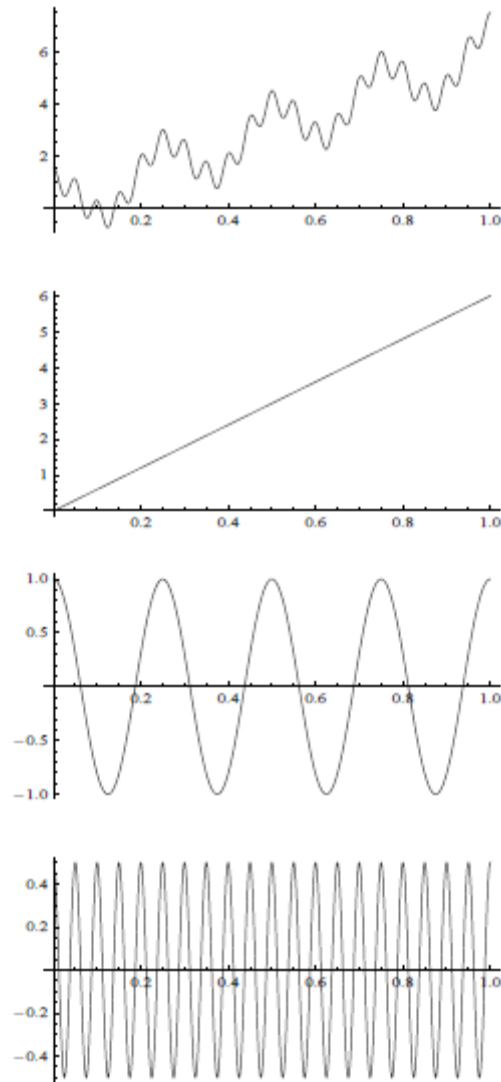


Fig. 7.  $f_{sig1}$  test signal: signal on top. From second to last row: the different components constituting  $Sig1$ .

حال یکبار با روش EMD و یکبار با روش EWT سیگنال را تجزیه میکنیم.

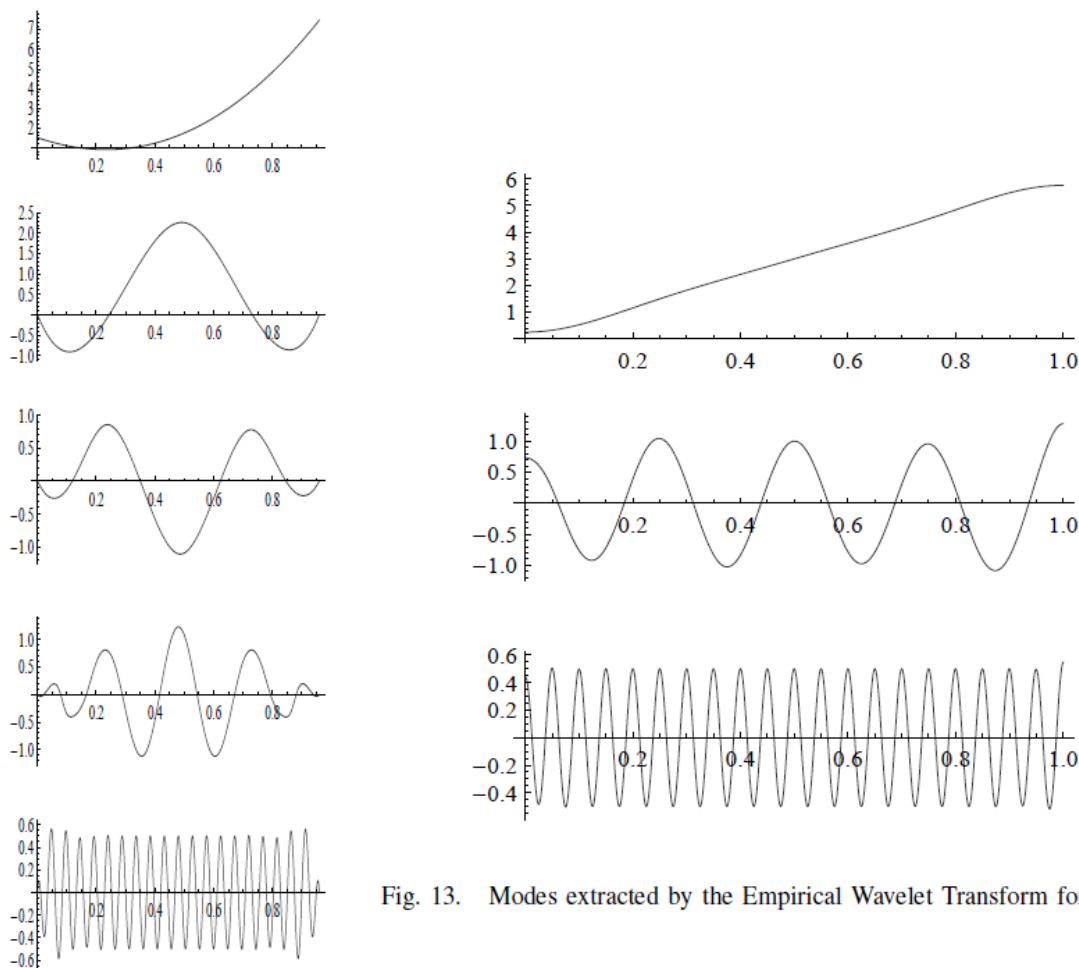


Fig. 13. Modes extracted by the Empirical Wavelet Transform for  $f_{Sig1}$ .

Fig. 18. Empirical Mode Decomposition of  $f_{Sig1}$ .

به وضوح میتوان به برتری EWT را نسبت به EMD مشاهده کرد

EWT نسبت به تبدیل ویولت و EMD دارای برتری هایی است که در زیر به آنها اشاره می کنیم :

در EMD یک روش رو به جلو و مشابه برای همه سیگنال ها دادیم، یعنی هم امتحان و خطا و هم تخمین نادرست در محاسبات وجود دارد؛ ولی در EWT به صورت حساب شده پیش می رویم.

در ویولت نیز اشکالاتی وجود دارد؛ زمانی که از Dyadic wavelet و یا wavelet packet استفاده می کنیم، بدون شناخت از مؤلفه های اصلی سیگنال، یک فیلتر از پیش تعیین شده را بر روی سیگنال اعمال می کنیم. این احتمال وجود دارد که مؤلفه های فرکانسی سیگنال، دقیقاً در فرکانس قطع فیلترها واقع شده باشند. در واقع با این روش، احتمال دارد که

بعضی از مؤلفه های سیگنال را ناخواسته حذف کنیم؛ ولی در EWT به این صورت نیست چون پهنای باند فیلترها هدمند و از روی طیف فرکانسی خود سیگنال تعیین شده اند. پس احتمال اینکه مؤلفه اصلی را حذف کنیم به صفر می رسد.

## References

1. Akbari, H., M.T. Sadiq, and A.U. Rehman, Classification of normal and depressed EEG signals based on centered correntropy of rhythms in empirical wavelet transform domain. *Health Information Science and Systems*, 2021. 9(1): p. 1-15.
2. Akbari, H. and M.T. Sadiq, Classification of Seizure and Seizure Free EEG Signals Based on second-order difference plot of DWT coefficients. 2020.
3. Akbari, H., Classification of Seizure and Seizure Free EEG Signals using Geometrical features derived from Poincaré plot, and binary particle swarm optimization.
4. Akbari, H., S.S. Esmaili, and S.F. Zadeh, Classification of seizure and seizure-free EEG signals based on empirical wavelet transform and phase space reconstruction. *arXiv preprint arXiv:1903.09728*, 2019.
5. Ghofrani, S. and H. Akbari. Comparing nonlinear features extracted in EEMD for discriminating focal and non-focal EEG signals. in *Tenth International Conference on Signal Processing Systems*. 2019. International Society for Optics and Photonics.
6. Akbari, H. and M.T. Sadiq, Detection of focal and non-focal EEG signals using non-linear features derived from empirical wavelet transform rhythms. *Physical and Engineering Sciences in Medicine*: p. 1-15.
7. Akbari, H., S. Saraf Esmaili, and S. Farzollah Zadeh, Detection of Seizure EEG Signals Based on Reconstructed Phase Space of Rhythms in EWT Domain and Genetic Algorithm. *Signal Processing and Renewable Energy*, 2020. 4(2): p. 23-36.
8. Akbari, H. and S. Ghofrani, Fast and accurate classification f and nf EEG by using sodp and EWT. *International Journal of Image, Graphics and Signal Processing (IJIGSP)*, 2019. 11(11): p. 29-35.
9. Hussain, W., et al., Epileptic seizure detection using 1 D-convolutional long short-term memory neural networks. *Applied Acoustics*, 2021. 177: p. 107941.
10. Sadiq, M.T., X. Yu, and Z. Yuan, Exploiting dimensionality reduction and neural network techniques for the development of expert brain-computer interfaces. *Expert Systems with Applications*. 164: p. 114031.
11. Sadiq, M.T., et al., Identification of Motor and Mental Imagery EEG in Two and Multiclass Subject-Dependent Tasks Using Successive Decomposition Index. *Sensors*, 2020. 20(18): p. 5283.

12. Sadiq, M.T., et al., A Matrix Determinant Feature Extraction Approach for Decoding Motor and Mental Imagery EEG in Subject Specific Tasks. *IEEE Transactions on Cognitive and Developmental Systems*, 2020.
13. Sadiq, M.T., et al., Motor imagery BCI classification based on novel two-dimensional modelling in empirical wavelet transform. *Electronics Letters*, 2020.
14. Sadiq, M.T., et al., Motor imagery EEG signals classification based on mode amplitude and frequency components using empirical wavelet transform. *IEEE Access*, 2019. 7: p. 127678-127692.
15. Sadiq, M.T., et al., Motor Imagery EEG Signals Decoding by Multivariate Empirical Wavelet Transform-Based Framework for Robust Brain–Computer Interfaces. *IEEE Access*, 2019. 7: p. 171431-171451.
16. Arianpour, Y., S. Ghofrani, and H. Amindavar. Locally nonlinear regression based on kernel for pose-invariant face recognition. in 2012 11th International Conference on Information Science, Signal Processing and their Applications (ISSPA). 2012. IEEE.
17. Sharma, M. and U.R. Acharya, Automated detection of schizophrenia using optimal wavelet-based l1 norm features extracted from single-channel EEG. *Cognitive Neurodynamics*, 2021: p. 1-14.
18. Sharma, M., et al., An automated diagnosis of depression using three-channel bandwidth-duration localized wavelet filter bank with EEG signals. *Cognitive Systems Research*, 2018. 52: p. 508-520.
19. Sharma, M., et al., An automatic detection of focal EEG signals using new class of time–frequency localized orthogonal wavelet filter banks. *Knowledge-Based Systems*, 2017. 118: p. 217-227.
20. Sharma, M., et al., Dual-tree complex wavelet transform-based features for automated alcoholism identification. *International Journal of Fuzzy Systems*, 2018. 20(4): p. 1297-1308.
21. Sharma, M., R.B. Pachori, and U.R. Acharya, A new approach to characterize epileptic seizures using analytic time-frequency flexible wavelet transform and fractal dimension. *Pattern Recognition Letters*, 2017. 94: p. 172-179.
22. Sharma, M. and R.B. Pachori, A novel approach to detect epileptic seizures using a combination of tunable-Q wavelet transform and fractal dimension. *Journal of Mechanics in Medicine and Biology*, 2017. 17(07): p. 1740003.
23. Sharma, M., D. Deb, and U.R. Acharya, A novel three-band orthogonal wavelet filter bank method for an automated identification of alcoholic EEG signals. *Applied Intelligence*, 2018. 48(5): p. 1368-1378.